数理解析研究所講究録
562巻 1985年 30-47

Non-harmonic Fourier series とその応用

東大・理　鈴木 貴

§1. Introduction.

Non-harmonic Fourier series とは？　Non-harmonic Fourier series とは、$\omega_{-n}=-\omega_n$ $(n\in\mathbb{Z})$ なる相異なる実数列 $\{\omega_n \mid n\in\mathbb{Z}\}$ に対して複素数 ξ_n $(n\in\mathbb{Z})$ を係数として

(1) $$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi_n e^{-i\omega_n t} \quad (-T\leqq t\leqq T)$$

と表わされるものであって、Harmonic Fourier series : $\omega_n=n\pi$ を一般化したものである。評価

(2) $$\|f\|^2_{L^2(-T,T)} \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty}|\xi_n|^2$$

が成り立つかどうか、又 $(\xi_n)\in\ell^2$ を動かすことによって f が $L^2(-T,T)$ を張るかどうか、即ち $\{e^{-i\omega_n t} \mid n\in\mathbb{Z}\}$ が $L^2(-T,T)$ の Riesz basis になるかどうかという問題は、ω_n の $n\to\infty$ における漸近挙動と、$T>0$ の大きさとに関係しており、古くより調べられてきた。(Paley-Wiener [6], Levinson [3], Schwartz [9], Young [15]) この問題の困難さは、一般に $\{e^{-i\omega_n t} \mid n\in\mathbb{Z}\}$ が $L^2(-T,T)$ において直交性を持たない所にあり、現在までに例えば次のような事実が知られている。

1. E. Ingham (1936 [1]) : $\Gamma = (\text{gap}) = \varliminf_{n\to\infty}(\omega_{n+1}-\omega_n) > \frac{\pi}{T}$.
$\Rightarrow$ 評価 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\xi_n|^2 \lesssim \|f\|^2_{L^2(-T,T)}$ が成り立つ。

2. R. M. Redheffer (1950 [7]) : $\varlimsup_{y\to\infty}\varlimsup_{x\to\infty}\frac{\Lambda(x+y)-\Lambda(x)}{y} < \frac{T}{\pi}$.
$\Lambda(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \#\{\omega_n \mid \omega_n < x\}$ $\Rightarrow$ $\{e^{-i\omega_n t} \mid n\in\mathbb{Z}\}$ は $L^2(-T,T)$ を張らない。

3. M. I. Kadec (1964. [2]) : $\exists D = \text{density} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\omega_n} = 1/\Gamma$.
$\sup_n |\omega_n - \frac{n}{D}| < \frac{1}{4D}$ $\Rightarrow$ $T=\pi D$ に対し、$\|f\|^2_{L^2(-T,T)} \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty}|\xi_n|^2$。

これらは Dirichlet series に対する Müntz-Szász の定理に対応する結果と考えられる。但し次の点が注目される：

a) $\{\omega_n \mid n\in\mathbb{Z}\}$ を固定するとき，T が大きい時は関数系 $\{e^{-i\omega_n t} \mid n\in\mathbb{Z}\}$ ~~が~~ は，$L^2(-T,T)$ の Riesz basis になるためには相対的に数が不足することになる。しかし，一次独立性は保証され，評価 (2) が成立する。

b) これに反し，T が小さい時は $\{e^{-i\omega_n t} \mid n\in\mathbb{Z}\}$ は相対的に数が多く，$L^2(-T,T)$ を張るけれども一次独立性がこわれて，評価 (2) が成り立たなくなる。

c) 両者の境目は，$T=\pi D$ である。

これらのことは，双曲型方程式の有限伝播性の性質を想起させないだろうか。

Russellの仕事. 実際，1967年に D. L. Russell は ω_n が Sturm-Liouville

作用素の固有値 λ_n の平方根である場合に、上の問題を完全に解決して双曲型方程式の可制御性 (exact controllability) の研究に応用した ([8])。考えている Sturm-Liouville 作用素の区間の長さを l とする時、$\omega_n = \lambda_n^{1/2}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ の $n\to\infty$ における挙動は、次の3つの場合に分かれる。

a. 両端で Dirichlet 条件を与える時、

$$\omega_n = \lambda_n^{1/2} = (n+1)\pi/l + O(\tfrac{1}{n}) \quad (n\to\infty).$$

b. 片側の端点で Dirichlet、反対側で第3種条件を与える時、

$$\omega_n = \lambda_n^{1/2} = (n+\tfrac{1}{2})\pi/l + O(\tfrac{1}{n}) \quad (n\to\infty).$$

c. 両端で第3種条件を与える時、

$$\omega_n = \lambda_n^{1/2} = n\pi/l + O(\tfrac{1}{n}) \quad (n\to\infty).$$

これらに対する Russell の解答は次の様である。

1. $T>l$ の時、いずれの場合も評価 (1) が成り立つ。しかし $\{e^{-i\omega_n t} \mid n\in\mathbb{Z}\}$ は $L^2(-T,T)$ を張らない。

2. $T<l$ の時、いずれの場合も評価 (1) は成り立たない。しかし $\{e^{-i\omega_n t} \mid n\in\mathbb{Z}\}$ は $L^2(-T,T)$ を張る。

3. $T=l$ の時

a の場合、$\{e^{-i\omega_n t} \mid n\in\mathbb{Z}\}$ に適当な関数を1つつけ加えると、$L^2(-T,T)$ の Riesz basis になる。

b の場合、$\{e^{-i\omega_n t} \mid n\in\mathbb{Z}\}$ は $L^2(-T,T)$ の Riesz basis である。

c の場合、$\{e^{-i\omega_n t} \mid n\in\mathbb{Z}\}$ の適当な関数を1つ取り除いたも

のは $L^2(-T,T)$ の Riesz basis になる。

Russell の研究した制御問題は次のようなものである。

ρ, p を正値で滑らかな関数，$X=L^2(0,1)$

$$V=\begin{cases} H_0^1(0,1) & (a\text{ の場合}) \\ H^1(0,1) \equiv \{a\in H^1(0,1) \mid a|_{x=1}=0\} & (b\text{ で } x=1 \text{ が Dirichlet の時}) \\ H^1(0,1) & (c\text{ の場合}) \end{cases}$$

に対し，双曲型方程式

$$(3)\quad \begin{cases} \rho(x)\partial_t^2 u-\partial_x(p(x)\partial_x u)=g(x)f(t) \quad (0\leq t<\infty,\ 0\leq x\leq 1) \\ \text{斉次境界条件（Dirichlet 又は第3種）} \\ u|_{t=0}=a_0\in V, \qquad \partial_t u|_{t=0}=a_1\in X \end{cases}$$

を考える。$\hat{V}\subset V$，$\hat{X}\subset X$ を固定するとき，与えられた $T>0$，$g(x)$ に対して，任意の $(a_0,a_1)\in\hat{V}\times\hat{X}$ を $u|_{t=T}=0$，$\partial_t u|_{t=T}=0$ とするような制御関数 $f=f(t)\in L^2(0,T)$ が存在するか。

今日では良く知られているように，この問題はある Moment 問題に書き換えられ，それは Banach の原理（Yosida [13]）によって評価 (2) が成り立つかどうかに帰着される。実際，Russell は g に対するある仮定の下で，$T_0>0$ が存在し，

1. $T>T_0 \Rightarrow$ そのような $f=f(t)$ が存在する。
2. $T<T_0 \Rightarrow$ 〃 は存在しない。
3. $T=T_0 \Rightarrow$ 境界条件による

ことを示している。

辻岡邦夫氏等の問題提起 (3)を抽象的に

$\frac{d}{dt}\binom{u}{\dot{u}} = A\binom{u}{\dot{u}} + Bf$ と書くとき、$a_0 \in \hat{V}$, $a_1 \in \hat{X}$ は $a = \binom{a_0}{a_1} \in D(A)$ を意味する。辻岡邦夫氏は $a \in D(A)$ であっても Russell の f のとり方、g に対する仮定から $\binom{u}{\dot{u}} \notin D(A)$ $(t>0)$ になってしまうことを指摘している。Russell の考えた $\hat{V}$, $\hat{X}$ のとり方は不自然であり、$f = f(t) \in L^2(0,T)$ のままで $\hat{V} = V$, $\hat{X} = X$ とすることはできないであろうか。[12]によると exact な意味では難かしい様である。

又、Russell の仕事と関連して成川公昭氏は[5]の Bang-Bang 制御による可制御性の研究において $a \in D(A^2)$ のとき $f = f(t) \in H^1(0,T)$ による Russell と同様の問題を考えている。

新な問題 次のような問題を考えよう。β を実数として、

$\ell^{2,\beta} = \{(\xi_n) \mid \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+1)^{\beta} |\xi_n|^2 < \infty\}$ とするとき、

$$\|f\|^2_{H_t^{\beta}(-T,T)} \approx \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+1)^{\beta} |\xi_n|^2 \equiv \|(\xi_n)\|^2_{\ell^{2,\beta}}$$

が成り立つであろうか。又 $(\xi_n) \in \ell^{2,\beta}$ を動かすことによって f は $H_t^{\beta}(-T,T)$ を張るであろうか。(これが成り立つ時、以下 $\{e^{-i\omega_n t} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は $\ell^{2,\beta}$ を係数として $H_t^{\beta}(-T,T)$ の Riesz basis をなすという。)

筆者は[10]において ω_n を Russell と同様のものとする時、$T \geq \ell$, $\beta \geq 1 \Longrightarrow \|(\xi_n)\|_{\ell^{2,\beta}} \lesssim \|f\|_{H_t^{\beta}(-T,T)}$ を示して、

双曲型方程式のある逆問題の安定性の研究に応用した。([11]も参照せられたい。) 上の問題は $\beta=0$ に対しては Russell の考えたものであり, $\beta=-1$ に対しては Narukawa [5] と対応するものである。βが負の場合も含めて一般的な結果を得ておくことは, 様々な応用の上からも重要なことと考えられる。実際, 以下で見るように, βを導入すると微妙で興味深い現象が現われるからである。

この研究は成川公昭氏(鳴門教育大)との共同研究であるが, 残念ながら最終的な結果には到っていない。筆者の[11]に続く中間的な報告であることをお断りする。我々の研究は双曲型方程式の有限伝播性に着目したもので, 複素関数論やFourier解析による従来のものとは異なる方法を用いる。この論稿からその方向をくみとっていただければ幸である。

§2. Summary.

$p\in C^0[0,1]$, $h\in\mathbb{R}$, $H\in\mathbb{R}$ に対し, $A=A_{p,h,H}$ を Sturm-Liouville 作用素

$$-\frac{d^2}{dx^2}+p(x) \quad \text{in } L^2(0,1) \text{ with } \left(-\frac{d}{dx}+h\right)\cdot\Big|_{x=0}=\left(\frac{d}{dx}+H\right)\cdot\Big|_{x=1}=0,$$

$\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$. $-\infty<\lambda_0<\lambda_1<\cdots\to\infty$ をその固有値

$\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$. $\|\varphi_n\|_{L^2(0,1)}=1$. $\varphi_n(0)>0$ をその固有関数とする。

漸近挙動

(4) $\quad \omega_n\equiv\lambda_n^{1/2}=n\pi+O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos n\pi x+O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n\to\infty)$

が知られている。(Yosida [14]) 特に $\alpha \geq 0,\ \lambda > -\lambda_0$ に対し、

$$D((A+\lambda)^{\frac{\alpha}{2}}) = \{a \in L^2(0,1) \mid \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+1)^{\alpha} |(a, g_n)|^2 < \infty\}$$

が成り立つ。ここで $(\ ,\ )$ は $L^2(0,1)$ の内積である。

$\beta \in \mathbb{R}$ に対し、$\underline{X_\beta} = \ell^{2,\beta} \times \ell^{2,\beta}$、即ち

$$\zeta = (\zeta^0, \zeta^1) \in X_\beta \Leftrightarrow \|\zeta\|_{X_\beta}^2 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+1)^{\beta} \{|\zeta_n^0|^2 + |\zeta_n^1|^2\} < \infty$$

とおく。$N = 1, 2, \cdots$ に対し、

$$f_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \{\zeta_n^0 \cos \omega_n t + \zeta_n^1 \sin \omega_n t\} \qquad \text{とおく。}$$

但し応用上の便利のために、$\omega_n = 0$ の時は $\sin \omega_n t$ は関数 t を表わすものと約束する。ω_n は有限個を除き実数である。

$\underline{\dot{Y}_\beta} = H_t^{\beta}(-T, T)$ とおく。又簡単のため $p = p(x)$ は十分滑らかであるとする。現在まで次のことが、$\beta \geq 1,\ \beta \neq 1/2 + \text{integer}$ に対して得られている。

__定理1__. $\zeta \in X_\beta$ のとき f_N は $\dot{Y}_\beta$ において収束する。

極限 $f = \lim_{N \to \infty} f_N$ を $\Phi(\zeta)$ と書き non-harmonic Fourier series と呼ぶ。$\underline{Y_\beta} = \Phi(X_\beta) < \dot{Y}_\beta$ とおく。

__定理2__. $T < 1$ の時、$Y_\beta \begin{array}{ll} = \dot{Y}_\beta & (1 \leq \beta < 3/2) \\ \subsetneqq \dot{Y}_\beta & (\frac{3}{2} < \beta) \end{array}$、及び

$\|\Phi(\zeta)\|_{Y_\beta} \lesssim \|\zeta\|_{X_\beta}$ が成立つ。但し Φ は1対1ではない。

定理3. $T>1$ の時. $Y_\beta \subsetneq \dot{Y}_\beta$ であるが, $\Phi : X_\beta \to Y_\beta$ は同型写像。即ち評価 $\|f\|^2_{H^\beta_f(-T,T)} \approx \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+1)^\beta \{|J^0_n|^2+|J^1_n|^2\}$ が成り立つ。

定理4. $T=1$ の時. $\Phi : X_\beta \to Y_\beta$ は同型写像であり.

$$Y_\beta \begin{array}{ll} = \dot{Y}_\beta & (1\le\beta<3/2) \\ \subsetneq \dot{Y}_\beta & (3/2<\beta) \end{array}$$

が成り立つ。

定理5. 一般に $0<\alpha-\beta<1/2$ の時, $Y_\beta \cap H^\alpha_f(-T,T) = Y_\alpha$ が成り立つ。

$\beta=0$ の時は. 前述の Russell の結果より Φ は同型写像ではない ($T=1$ の時) ことに注意しておく。この点については後の節で述べる。

以下簡単に証明の荒筋を説明したい。

1° $\lambda>-\lambda_1$ に対して, $Z_\beta = D((A+\lambda)^{\frac{\beta}{2}}) \times D((A+\lambda)^{\frac{\beta-1}{2}})$ $(\beta\ge1)$ とおく。(4) より $0<\inf_n|\varphi_n(0)| \le \sup_n|\varphi_n(0)|<\infty$, $\omega_n = n\pi + O(\frac{1}{n})$ $(n\to\infty)$ なること. 及び $\{\varphi_n \mid n\ge0\}$ が $L^2(0,1)$ で直交することから.

$$J : J=(J^0,J^1)\in X_\beta \longmapsto a=(a_0,a_1)\in Z_\beta.$$

$$a_0=\sum_{n=0}^{\infty} a^0_n\varphi_n \quad , \quad a^0_n = J^0_n/\varphi_n(0)$$

$$a_1=\sum_{n=0}^{\infty} a^1_n\varphi_n \quad , \quad a^1_n = \hat{\omega}_n\cdot J^1_n/\varphi_n(0) \quad \left(\hat{\omega}_n=\begin{cases}\omega_n & (\omega_n\ne0)\\ 1 & (\omega_n=0)\end{cases}\right)$$

は同型写像になる。

2°. $\omega_n=0$ の時，$\sin\omega_n t/\omega_n$ は関数 t を表わすことにして，

$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\{a_n^0\cos\omega_n t + a_n^1 \sin\omega_n t/\omega_n\}\varphi_n(x)$ とおく。u は，

双曲型方程式

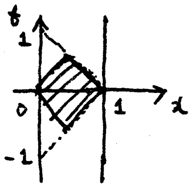
$$\partial_t^2 u + (-\partial_x^2+p(x))u=0$$

$$\begin{cases}(-\partial_x+h)u|_{x=0}=(\partial_x+H)u|_{x=1}=0\\ u|_{t=0}=a_0,\quad \partial_t u|_{t=0}=a_1\end{cases}$$

の解であり，形式的に $u|_{x=0}=f(t)\ (=\lim_{\nu\to\infty} f_\nu(t))$ なる関係がある。この写像が $f=\Phi(\zeta)$ と表わされるものである。

3°. 最も基本的な $T=1$ の場合を考えよう。$\beta\geq1$, $\beta\neq 1/2+\text{integer}$, p は十分滑らかとする。

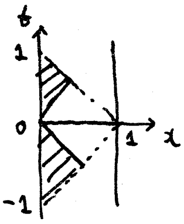
$\hat{Z}_\beta = H_x^\beta(0,1)\times H_x^{\beta-1}(0,1)$ $(\beta\geq1)$ とおくと，$\hat{Z}_\beta \supset Z_\beta$ である。$(a_0,a_1)\in\hat{Z}_\beta$ に対し，d'Ambert の公式（即ち特性曲線の方法）と Picard による反復法によって，



$$\begin{cases}\partial_t^2 u + (-\partial_x^2+p(x))u=0\\ u|_{t=0}=a_0(x),\quad \partial_t u|_{t=0}=a_1(x)\end{cases}$$

なる $u=u(x,t)$ が図の斜線部において Volterra 型積分方程式の解として構成~~され~~できる。（波動方程式の Cauchy 問題）次に

$g_\pm = u|_{t=\pm x}$ $(0\leq x\leq 1/2)$ とおくとき，同じ方法によって



$$\begin{cases}\partial_t^2 u^\pm + (-\partial_x^2+p(x))u^\pm=0\\ (-\partial_x+h)u^\pm|_{x=0}=0,\quad u^\pm|_{t=\pm x}=g_\pm\end{cases}$$

なる $u^\pm=u^\pm(x,t)$ が，図の斜線の上部，下部それぞれにおいて構成できる。そこで，

$f_\pm = u^\pm|_{x=0}$,　　$f = f_+ \oplus f_-$　　とおくと、

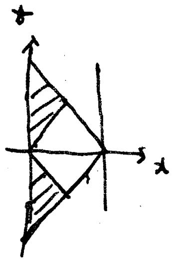
$f \in \hat{Y}_\beta \equiv H_t^\beta(0,1) \oplus H_t^\beta(-1,0) \;\cap\; \{f_+|_{t=0} = f_-|_{t=0}\}$　$(\beta \geq 1)$

となることがわかる。

これによって有界写像 $\hat{F} : a \in \hat{Z}_\beta \longmapsto f \in \hat{Y}_\beta$ が構成されたが、実はこの $\hat{F}$ は同型写像になる。それを見るのには、有界な逆写像 $\hat{G}$ を構成すればよい。実際、

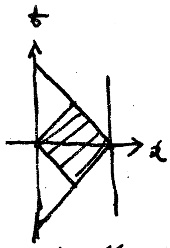
$f = f_+ \oplus f_- \in \hat{Y}_\beta$ に対し、

$$\begin{cases} \partial_t^2 u^\pm + (-\partial_x^2 + p(x)) u^\pm = 0 \\ u^\pm|_{x=0} = 0, \quad \partial_x u^\pm|_{x=0} = f_\pm \end{cases}$$



なる $u^\pm = u^\pm(x,t)$ を図の斜線部において前と同様に構成し、次に $g_\pm = u^\pm|_{t=\pm x}$ に対して、

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + (-\partial_x^2 + p(x)) u = 0 \\ u|_{t=\pm x} = g_\pm \end{cases}$$



なる $u = u(x,t)$ を図の斜線部において同様に構成した後、

$a_0 = u|_{t=0}$,　　$a_1 = \partial_t u|_{t=0}$　　とおけば、

有界写像 $\hat{G} : f \in \hat{Y}_\beta \longmapsto a = (a_0, a_1) \in \hat{X}_\beta$ が得られ、関係 $\hat{G} \circ \hat{F} = id$,　$\hat{F} \circ \hat{G} = id$ が成り立つことが確かめられる。

以上のことを、下の diagram のように表わすことができる。

$$\begin{tikzcd} \hat{Y}_\beta \arrow[r, shift left, "\hat{G}"'] \arrow[r, phantom, "\sim"] & \hat{Z}_\beta \arrow[l, shift left, "\hat{F}"'] & \\ Y_\beta \arrow[u, phantom, "\bigcup"] \arrow[r, leftrightarrow, "\sim"] & Z_\beta \arrow[u, phantom, "\bigcup"] \arrow[ul, phantom, "\circlearrowleft"] & X_\beta = \ell^{2,\beta} \times \ell^{2,\beta} \arrow[l, "J"', "\sim"] \arrow[ll, bend left, "\Phi"] \end{tikzcd}$$

$Y_\beta = \hat{F}(Z_\beta)$ とおけば、上の diagram より $X_\beta \cong Y_\beta$ となる。この同型写像が non-harmonic Fourier series を与える写像 Φ に他ならない。

4°. Y_β と $\dot{Y}_\beta = H^{\beta}_{t}(-1,1)$ の関係をみるのには $f=\hat{F}(a)$ の f_+, f_- の $t=0$ における指数 $[\beta-1/2]$ までのつながり具合を見ればよい。ところが写像 $\hat{F}$ のつくり方から、これは $a=(a_0,a_1)$ の左端点 $x=0$ における指数 $[\beta-1/2]\times[\beta-3/2]$ までの作用素 A $=A_{p,k,H}$ に関する適合性の条件（境界条件）で置き換えられることが知られている。$\hat{Z}_\beta$ の部分空間でそのような条件をみたすもの全体を $\dot{Z}_\beta$ とおくと、$\dot{Z}_\beta \supset Z_\beta$ であり、再び diagram

$$\begin{array}{ccccc}
\dot{Y}_\beta & \overset{\sim}{\longleftrightarrow} & \dot{Z}_\beta & & \\
\cup & & \cup & & \\
Y_\beta & \overset{\sim}{\longleftrightarrow} & Z_\beta & \overset{\sim}{\longleftrightarrow} & X_\beta = \ell^{2,\beta}\times\ell^{2,\beta}
\end{array}$$

が得られ、$Y_\beta \subset \dot{Y}_\beta$ がわかる。

更に $\mathrm{codim}\,(Y_\beta;\dot{Y}_\beta) = \mathrm{codim}\,(Z_\beta;\dot{Z}_\beta)$ であり、後者は楕円型作用素の分数巾の定義域の特徴付け (Lions-Magenes [4] etc.,) によって完全に押さえることができる。即ち、$\dot{Z}_\beta$ には右端点 $x=1$ における指数 $[\beta-1/2]\times[\beta-3/2]$ までの境界条件が involve されてくる。これによって特に定理4が証明できる。

§3. <u>Harmonic の場合.</u>

以上の筋書を実行するときには、双曲型方程式の解、そのある線分への制限に関する諸正則性、involveされてくる境界条件の意味等を吟味しなければならない。βが負になる場合も含めて $\rho\equiv 0,\ h=0,\ H=0$ の場合について、具体的な計算を示してみたい。

この場合、$\omega_n = n\pi$ $(n=0,1,2,\cdots)$ であり、関数系 $S\equiv\{\cos n\pi t,\ \sin m\pi t,\ t \mid n\geqq 0,\ m\geqq 1\}$ が $\ell^{2,\beta}$ を係数として $H^{\beta}_{t}(-1,1)$ の Riesz basis になるかどうかを調べることになる。

<u>写像 $\hat{R}$ の表示</u>：

<u>1°</u> $a=(a_0,a_1)$ に対し、$\begin{cases}\partial_t^2 u-\partial_x^2 u=0\\ u|_{t=0}=a_0(x),\ \partial_t u|_{t=0}=a_1(x)\end{cases}$ なる $u=u(x,t)$

は、 $u(x,t)=\frac{1}{2}\{a_0(x+t)+a_0(x-t)\}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}a_1(s)ds$ である。

<u>2°</u> $g_+(x)=u|_{t=x}$

$$=\frac{1}{2}\{a_0(2x)+a_0(0)\}+\frac{1}{2}\int_0^{2x}a_1(s)ds$$ であり、

$\begin{cases}\partial_t^2 u^+-\partial_x^2 u^+=0\\ u^+|_{t=x}=g_+,\ \partial_x u^+|_{x=0}=0\end{cases}$ なる $u^+=u^+(x,t)$ は、

$$u^+(x,t)=g_+\left(\frac{x+t}{2}\right)+g_+\left(\frac{t-x}{2}\right)-g_+(0)$$
$$=\frac{1}{2}\{a_0(t+x)+a_0(t-x)\}+\frac{1}{2}\left(\int_0^{t+x}+\int_0^{t-x}\right)a_1(s)ds$$ である。

従がって $f_+(t)=u^+|_{x=0}=a_0(t)+\int_0^t a_1(s)ds$ $(0\leqq t\leqq 1)$ となる。

<u>3°</u> 同様に、

$g_-(x)=u|_{t=-x}=\frac{1}{2}\{a_0(0)+a_0(2x)\}+\frac{1}{2}\int_{2x}^{0}a_1(s)ds$ であり、

$$u^-(x,t) = g_-\left(\frac{x-t}{2}\right) + g_-\left(\frac{x+t}{2}\right) - g_-(0)$$
$$= \frac{1}{2}\{a_0(x-t) + a_0(-(x+t))\} + \frac{1}{2}\left(\int_{x-t}^0 + \int_{-(x+t)}^0\right) a_1(s)ds$$

と与えられる。従がって $f_-(t) = a_0(-t) + \int_{-t}^0 a_1(s)ds \quad (-1 \leq t \leq 0)$ である。

写像 $\hat{G}$ の表示：

1° $f = f_+ \oplus f_-$ に対し、$\begin{cases} \partial_t^2 u^\pm - \partial_x^2 u^\pm = 0 \\ u^\pm|_{x=0} = f_\pm, \quad \partial_x u^\pm|_{x=0} = 0 \end{cases}$ なる $u^\pm = u^\pm(x,t)$ は、$u^\pm(x,t) = \frac{1}{2}\{f_\pm(t+x) + f_\pm(t-x)\}$ と与えられる。

2° 従がって、 $g_+(x) = u^+|_{t=x} = \frac{1}{2}\{f_+(2x) + f_+(0)\}$

$g_-(x) = u^-|_{t=-x} = \frac{1}{2}\{f_-(0) + f_-(-2x)\}$ であり、

$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 \\ u|_{t=\pm x} = g_\pm \end{cases}$ なる $u = u(x,t)$ は、~~$u(x,t)$ と~~

$$u(x,t) = g_+\left(\frac{x+t}{2}\right) + g_-\left(\frac{x-t}{2}\right) - c \quad (c = g_+(0) = f_+(0) = g_-(0) = f_-(0))$$
$$= \frac{1}{2}\{f(t+x) + f(t-x)\}$$
$$\left(\text{但し、} f(s) = \begin{cases} f_+(s) & (0 \leq s \leq 1) \\ f_-(s) & (-1 \leq s \leq 0) \end{cases}\right)$$

と与えられる。

3° 従がって $a_0(x) = u|_{t=0} = \frac{1}{2}\{f_+(x) + f_-(x)\}$,

$a_1(x) = \partial_t u|_{t=0} = \frac{1}{2}\{f_+'(x) + f_-'(x)\}$ である。

$\beta \geq 1,\ \beta \neq \frac{1}{2} + \text{integer}$ の時. $\hat{Z}_\beta = H_x^\beta(0,1) \times H_x^{\beta-1}(0,1)$, $\hat{Y}_\beta = H_t^\beta(0,1) \oplus H_t^\beta(-1,0) \cap \{f_+|_{t=0} = f_-|_{t=0}\}$

とすると、確かに $\hat{Y}_\beta \underset{\hat{G}}{\overset{\hat{F}}{\rightleftarrows}} \hat{Z}_\beta$ は同型写像になっている。

$\dot{Y}_\beta = H_t^\beta(-1,1)$ に対応する $\hat{Z}_\beta$ の部分空間として、$A = A_{0,0,0}$ の

$x=0$ における境界条件を $[\beta-1/2]\times[\beta-3/2]$ までみたすもの．即ち

$\dot{Z}_\beta = \dot{H}_x^\beta\langle 0,1) \times \dot{H}_x^{\beta-1}\langle 0,1)$．但し．$\alpha\geq 0$，~~に対し~~ $\alpha \neq 1/2 +$ integer に対し，

$$\dot{H}_x^\alpha\langle 0,1) = \{a\in H_x^\alpha(0,1) \mid \partial_x^\ell a|_{x=0}=0,\ \ell \text{ は } [\alpha-1/2] \text{ 以下の奇数}\}$$

が得られ，$\dot{Y}_\beta \longleftrightarrow \dot{Z}_\beta$ なる同型が得られる。一方において，

$Z_\beta = D((A+\lambda)^{\frac{\beta}{2}})\times D((A+\lambda)^{\frac{\beta-1}{2}}) = \dot{H}_x^\beta\langle 0,1\rangle \times \dot{H}_x^{\beta-1}\langle 0,1\rangle$，但し，

$$\dot{H}_x^\alpha\langle 0,1\rangle = \{a\in H_x^\alpha(0,1)\mid \partial_x^\ell a|_{x=0} = \partial_x^\ell a|_{x=1}=0,\ \ell \text{ は } [\alpha-1/2] \text{ 以下の奇数}\}$$

であり，

$\dot{Z}_\beta \supset Z_\beta$，　$\mathrm{codim}(Z_\beta;\dot{Z}_\beta) = \mathrm{codim}(Y_\beta;\dot{Y}_\beta) = [\beta-1/2]$ となる。

$1\geq\beta>1/2$ の時．Riesz の定理によって $L^2(0,1)^*$ を $L^2(0,1)$ と同一視し，

$\hat{Z}_\beta = H_x^\beta(0,1)\times (H_x^{-(\beta-1)}(0,1))^*$，$Z_\beta = D((A+\lambda)^{\frac{\beta}{2}})\times D((A+\lambda)^{-\frac{\beta-1}{2}})^*$ とおく。

J によって $X_\beta = \ell^{2,\beta}\times\ell^{2,\beta} \cong Z_\beta$ である。　$\chi(s) = \chi_{[0,t]}(s)$ を

$[0,t]$ の定義関数とするとき，$\chi\in V = H_x^{-(\beta-1)}(0,1)$ であるから，

$a_1\in V^*$ に対し，

$\int_0^t a_1(s)\,ds = {}_V\langle \chi_{[0,t]}, a_1\rangle_{V^*}$ とみなすことができる。

$\hat{F}$ をそのように解釈すれば，$\hat{Y}_\beta \underset{\hat{G}}{\overset{\hat{F}}{\rightleftarrows}} \hat{Z}_\beta$ は同型写像である。

$\beta\geq 1$ と同様にして．$\dot{Y}_\beta = H_t^\beta(-1,1) = \hat{Y}_\beta$　$(\hat{Y}_\beta = H_t^\beta(0,1)\oplus H_t^\beta(-1,0) \cap \{f_+|_{t=0} = f_-|_{t=0}\})$

$\dot{Z}_\beta = \hat{Z}_\beta$ に対して，

$\mathrm{codim}(Y_\beta;\dot{Y}_\beta) = \mathrm{codim}(Z_\beta;\dot{Z}_\beta)=0$．即ち $Y_\beta = \dot{Y}_\beta$ を導くことができる。

$0 \le \beta < 1/2$ の時. 前と同様に $Z_\beta = D((A+\lambda)^{\frac{\beta}{2}}) \times (D((A+\lambda)^{-\frac{\beta-1}{2}}))^*$ とおくと、

$Z_\beta \xleftarrow[\sim]{J} X_\beta$ である。 $\hat{Y}_\beta = H^\beta_\sharp(-1,1)$ に対応する $\hat{Z}_\beta$ を

うまく構成し、$\int_0^* a_1(s)ds$ の意味をつけて $\hat{A}$ の実現を与えよう。

簡単のため $\beta \ge 0$ とする。

$f = f_+ \oplus f_- \in \hat{Y}_0 = L^2_\sharp(-1,1)$ に対し、

$\{f\}_e = f$ の even part $= \frac{1}{2}(f+\check{f})$ （$\check{f}$ は f の裏返し）

$\{f\}_o = f$ の odd part $= \frac{1}{2}(f+\check{f})$

が定義できる。前に表示した $\hat{G}$ は $a_0 = \{f\}_e|_{[0,1]}$, $a_1 = \frac{d}{dx}\{f\}_o|_{[0,1]}$ と考えられよう。

$a_0 \in L^2(0,1)$ に対しその even な拡張 $[a_0]_e \in L^2(-1,1)$ によって、$L^2(0,1) \cong \{L^2(-1,1)\}_e$ とみなせる。一方 Poincaré の不等式によって

同型 $\frac{d}{dx} L^2(-1,1) \cong (H^1_0(-1,1))^*$ が得られる。

$$\overset{\cup}{b} = \frac{d}{dx} B \mapsto \tilde{b}, \quad \langle \tilde{b}, \varphi \rangle_{(H^1_0)^*, H^1_0} = -(B, \varphi')_{L^2, L^2}$$

これによって、

$$\frac{d}{dx}\{L^2(-1,1)\}_o \cong \{H^1_0(-1,1)^*\}_e \cong (\{H^1_0(-1,1)\}_e)^* \text{ となる。}$$

$H^1(0,1\rangle = \{a_1 \in H^1(0,1) \mid a_1|_{x=1} = 0\}$ とおくと、$H^1(0,1\rangle \underset{[\cdot]_e}{\cong} H^1_0(-1,1)$ であるから、$\frac{d}{dx}\{L^2(-1,1)\}_o \cong (H^1(0,1\rangle)^*$ とみなせる。その同一視は、even な拡張 $[\cdot]_e$ に対応するものであるので、その記法を流用することにすると、前の写像 $\hat{G}$ が、

$$\hat{G} : \hat{Y}_0 = L^2_\sharp(-1,1) \longrightarrow L^2(0,1) \times (H^1(0,1\rangle)^* \equiv \hat{Z}_0$$

$$f \longmapsto (a_0, a_1) \quad ; \quad [a_0]_e = \{f\}_e, \ [a_1]_e = \frac{d}{dx}\{f\}_o$$

と実現される。次に $\frac{d}{ds}:\{L^2(-1,1)\}_0 \longrightarrow \frac{d}{ds}\{L^2(-1,1)\}_0$ は injection である。即ち，$b\in\frac{d}{ds}\{L^2(-1,1)\}_0$ に対し $b=\frac{d}{ds}B$ なる $B\in\{L^2(-1,1)\}_0$ は一意である。この B を $B=\int_0^t b(s)ds$ と書くことにすれば，$\hat{G}$ の逆写像が

$$\hat{F}:\ \hat{Z}_0=L^2(0,1)\times(H^1(0,1\rangle)^*\longrightarrow L^2(-1,1)=\hat{Y}_0$$
$$(a_0,a_1)\mapsto f,\quad \{f\}_e=[a_0]_e,\ \{f\}_0=\int_0^t[a_1]_e(s)ds$$

と実現される。即ち，$\hat{Y}_0 \underset{\hat{G}}{\overset{\hat{F}}{\rightleftarrows}} \hat{Z}_0$ は同型である。

一方において，$Z_0=L^2(0,1)\times(H^1(0,1))^*$，~~codim~~ $H^1(0,1\rangle\subsetneq H^1(0,1)$，$\mathrm{codim}\,(H^1(0,1\rangle;H^1(0,1))=1$ であるので，$\hat{Z}_0\subsetneq Z_0$，$\mathrm{codim}\,(\hat{Z}_0;Z_0)=1$ とできる。この埋込みは $H^1(0,1\rangle$ の $H^1(0,1)$ に対する余空間のとり方に依存する。

φ_k を任意の固有関数として固定し，$a\in H^1(0,1)$ ~~を~~に対し

$$a(x)=\underbrace{\left(a(x)-\frac{a(1)}{\varphi_k(1)}\varphi_k(x)\right)}_{\in H^1(0,1\rangle}+\frac{a(1)}{\varphi_k(1)}\varphi_k(x)$$

なる直和分解を与えると，

$b\in(H^1(0,1\rangle)^*$ を $\tilde{b}\in(H^1(0,1))^*$，${}_{(H^1)^*}\langle\tilde{b},\varphi_k\rangle_{H^1}=0$ と同一視することになる。従がって J^{-1} で $\hat{Z}_0$ を $X_0=\ell^{2,0}\times\ell^{2,0}$ の部分空間に引きもどしてやることにより，$\{\sin m\pi t,\ t\mid m\geq1\}$ の任意の関数をひとつとり除いたものと $\{\cos n\pi t\mid n\geq0\}$ を合わせたものは，$\ell^{2,0}$ を係数として $L^2_+(-1,1)$ の Riesz bases になることがわかる。

<u>以上をまとめると</u> $\beta>1/2$，$\beta\neq 1/2+\text{integer}$ の時，$S=\{\cos n\pi t,$

$\sin m\pi t, t \mid n\geq 0, m\geq 1\}$ に $[\beta-1/2]$ 個の適当な関数をつけ加えたものは $\ell^{2,\beta}$ を係数として $H_t^\beta(-1,1)$ の Riesz basis になる。
$1/2>\beta\geq 0$ の時. S より $\{\sin m\pi t, t \mid m\geq 1\}$ の任意の関数を1つとり除いたものは $\ell^{2,\beta}$ を係数として $H_t^\beta(-1,1)$ の Riesz basis になる。

$\beta\leq 0$ の場合. 研究の方向には2通りある。
A. $\beta=0$ の場合のように不定積分 $\int_0^t a_1(s)ds$ の意味付けをする。
B. $S_1 \equiv \{\cos n\pi t, \sin m\pi t \mid n\geq 0, m\geq 1\}$ が $L^2(-1,1)$ の完全直交系をなすことを利用し. Φ の S_1 上への制限 Φ_1 の双対写像 Φ_1^* によって $\beta\geq 0$ の結果を $\beta\leq 0$ に引き込む。
結果としては. H_t^β を $(H_t^{-\beta})^*$ におき換えて. $-\beta_{(\geq 0)}$ の場合と全く同様のことが成り立つものと思われる。

§4. Non-harmonic の場合.

$\beta\geq 1$ に対しては Harmonic と類似の議論ができて. ~~類似~~同様の結論を得る。前節のAの方法で β を下げてやることができる。$\beta=1$ までは Harmonic と同様の結論が得られるが. これ以上下げるのには技術的困難がある。

方法Bは直交性がこわれるので. そのままでは使えない。しかし適当な修正によってこの方法は有効なのではないかと. 筆者は現在の所考えている。

文献

[1] Ingham, E., Some trigonometrical inequalities in the theory of series, Math. Z., 41 (1936) 367–379.

[2] Kadec, M.I., The exact value of the Paley-Wiener constant, Sov. Math., 5-2 (1964) 559–561.

[3] Levinson, N., Gap and Density Theorems, Collq. Public. vol 26, AMS, Providence 1940.

[4] Lions, J.L., Magenes, E., Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications I., Springer, 1972.

[5] Narukawa, K., Complete controllability of one-dimensional vibrating systems with bang-bang controls, SIAM J. Control & Optim., 22 (1984) 788–804.

[6] Paley, R.E.A.C., Wiener, N., Fourier Transforms in Complex Domain, Collq. Public. vol 19, AMS, Providence, 1934.

[7] Redheffer, R.M., Elementary remarks on completeness, Duke Math. J., 35 (1968) 103–116.

[8] Russell, D.L., Nonharmonic Fourier series in the control theory of distributed systems, J. Math. Anal. Appl., 18 (1967) 542–560.

[9] Schwartz, L., Etude des Somme d'Exponentielles, 2nd ed., Hermann, Paris, 1950.

[10] Suzuki, T., A stability theorem on the boundary identification for coefficients of hyperbolic equations, Proc. Japan Acad., 60 (1984) 309–311.

[11] —, Non-harmonic Fourier series と双曲型方程式の逆問題, 実関数論 (23回), 関数解析 (22回) 合同シンポジウム. 日本数学会. 1984.

[12] Tsujioka, K., Remarks on controllability of second order evolution equations in Hilbert spaces. SIAM J. Control, 8 (1970) 90–99.

[13] Yosida, K., Functional Analysis, Springer, 1964.

[14] —, 積分方程式論 (第2版), 岩波, 1978

[15] Young, R.M., An Introduction to Non-harmonic Fourier Series, A.P., 1980.